Capítulo 1

Espacios de Hilbert

1.1. Introducción

Dentro de la familia de espacios vectoriales dotados de una estructura métrica, son los espacios de Hilbert los que, como generalización a cualquier dimensión del espacio euclídeo $\mathbb{R}^N$, presentan una estructura geométrica más rica y, por tanto, más sencilla de manejar. Comenzaremos por estudiar los espacios donde se ha definido un producto escalar, proporcionando diversos ejemplos. Veremos cómo se obtiene una distancia y una topología naturales. Analizaremos a continuación el problema de la mejor aproximación a un subespacio, usando las nociones de subconjunto convexo, de proyección y de ortogonalidad. Ello dará lugar, entre otras consecuencias, a la obtención de una estructura sencilla para las aplicaciones lineales y continuas sobre un espacio de Hilbert con valores en el cuerpo de escalares, y a una introducción natural a las series de Fourier abstractas.

1.2. Productos escalares. Espacios prehilbertianos

Como es usual, denotaremos por $\mathbb{N}$ el conjunto $\{1, 2, \dots\}$ de los enteros positivos, por $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales, y por $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos.

Definición 1.2.1. Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Llamamos *producto escalar* sobre H a una aplicación $(\cdot|\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ que cumple, para todos los vectores $x, y \in H$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, las siguientes propiedades:
(1) $(x|y) = (y|x)$
(2) $(x|y + z) = (x|y) + (x|z)$
(3) $(\alpha x|y) = \alpha(x|y)$
(4) $(x|x) \geq 0$
(5) $(x|x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.
Un espacio vectorial H dotado de un producto escalar se denomina *espacio prehilbertiano*.

En otras palabras, un producto escalar es una forma bilineal simétrica definida positiva y no degenerada. La linealidad aparece sólo en la segunda variable, pero se cumple también para la primera en virtud de la simetría. De modo explícito, se obtienen las siguientes consecuencias inmediatas de la definición de producto escalar, válidas para todo par de vectores $x, y \in H$ y para cada $\alpha \in \mathbb{R}$:
(a) $(0|y) = 0$
(b) $(x|\alpha y) = \alpha(x|y)$
(c) $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$.

Definición 1.2.2. Si H es un espacio prehilbertiano y $x \in H$, al número real no negativo $\sqrt{(x|x)}$ se le llama *norma* –o, más propiamente, *norma cuadrática*– de x. Denotaremos tal número por $\|x\|$.

Enumeramos en el siguiente resultado las propiedades principales de la norma en un espacio prehilbertiano.

Proposición 1.2.3. *Supongamos que H es un espacio prehilbertiano, que $x, y \in H$ y que $\alpha \in \mathbb{R}$. Se verifica:*

(1) $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

(3) $|(x|y)| \leq \|x\|\,\|y\|$ [*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*]

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ [*Desigualdad triangular*]

(5) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ [*Desigualdad triangular inversa*]

(6) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ [*Identidad del paralelogramo*].

Demostración. Las propiedades (1) y (2) son obvias.

En cuanto a (3), consideremos cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\|x - \lambda y\| \geq 0$, se tiene $(x - \lambda y, x - \lambda y) \geq 0$, así que $\|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 - 2\lambda(x|y) \geq 0$ para todo λ. Ya que este trinomio de segundo grado (en λ) es siempre ≥ 0, deducimos que su discriminante es ≤ 0, es decir, $(x|y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$.

Por otra parte, de la definición de norma y de (3), obtenemos que $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$, de donde se deduce (4). Para obtener (5), simplemente aplicamos (4) a $x, y - x$. En efecto, sigue que $\|y\| = \|x + (y - x)\| \leq \|x\| + \|y - x\|$, luego $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$. Invirtiendo los papeles de x, y, resulta $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$, de donde se deriva lo que queremos.

La igualdad (6) se obtiene de una simple manipulación algebraica, sin más que tener en cuenta la definición de norma y las propiedades de bilinealidad y simetría del producto escalar. $\Box$

Ejemplos 1.2.4. Los siguientes espacios son prehilbertianos si se les dota de los productos escalares respectivamente indicados:

1. $H = \mathbb{R}^N$ con $((x_1, \ldots, x_N)|(y_1, \ldots, y_N)) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$.

2. $H = C([a,b])$, el espacio vectorial de las funciones reales continuas en un intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, con $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

3. $H = l_2$, el espacio de las sucesiones reales $x = (x_i)$ de cuadrado sumable, es decir, tales que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty$. Es obvio que $\lambda x \in l_2$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in l_2$. Sean ahora $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$ dos elementos de l_2. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$ a los vectores $(|x_1|, \dots, |x_n|)$, $(|y_1|, \dots, |y_n|)$, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \le (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2} (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2)^{1/2} \le (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2)^{1/2} (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2)^{1/2} < +\infty.$$

Ya que esto es válido para todo n, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i|$ es convergente. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| < +\infty.$$

Así que l_2 es un espacio vectorial. Fácilmente se observa que $(x|y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ es un producto escalar al que corresponde la norma $\|x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2)^{1/2}$.

4. $H = L^2([a,b])$, el espacio de las funciones medibles Lebesgue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de cuadrado integrable, es decir, tales que $\int_a^b f^2 < +\infty$, donde la integral se entiende en el sentido de Lebesgue. En tal espacio, estamos identificando dos funciones cuando son iguales en casi todo punto de $[a,b]$ con respecto a la medida de Lebesgue. Así que, en rigor, estamos considerando el espacio $\mathcal{L}^2 = L^2([a,b])/\sim$ de las clases de equivalencia para la relación definida por: $f \sim g$ si y sólo si $f = g$ e.c.t. Prescindiremos de esta formalización de ahora en adelante, pero teniendo en cuenta que estamos tratando con clases de funciones.

Sean $f, g \in L^2([a,b])$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Es evidente que $\lambda f \in L^2([a,b])$. Por otra parte, de la desigualdad $0 \le (x-y)^2$ $(\forall x, y \in \mathbb{R})$ se deduce que $|fg| \le (1/2)(f^2 + g^2)$ en $[a,b]$. Por tanto $\int_a^b |fg| < +\infty$, así que $fg \in L^1([a,b])$, es decir, fg es Lebesgue-integrable en $[0,1]$ (recordar que $h \in L^1([a,b])$ si y sólo si h es medible y $\int_a^b |h| < +\infty$). Pero $f+g$ es medible y $(f+g)^2 = f^2+g^2+2fg$, luego $\int_a^b (f+g)^2 < +\infty$.

En consecuencia, $L^2([a,b])$ es un espacio vectorial. Ahora bien, la expresión $(f|g) = \int_a^b fg$ tiene sentido para cada par $f, g \in L^2([a,b])$ y, sin más que tener en cuenta que

$$\int_a^b f^2 = 0 \implies f = 0 \ \text{ e.c.t.}, \tag{P}$$

lo cual veremos más adelante, obtenemos fácilmente que es un producto escalar. La correspondiente norma cuadrática viene dada por $\|f\| = (\int_a^b f^2)^{1/2}$. Probemos la propiedad (P) establecida anteriormente: Basta demostrar que si $F : [a,b] \to [0,+\infty)$ es medible y $\int_a^b F = 0$, entonces $F = 0$ e.c.t. $[a,b]$, o equivalentemente, $\mu(A) = 0$, donde $A := \{x \in [a,b] : F(x) > 0\}$ y μ es la medida de Lebesgue unidimensional. Sea $A_n := \{x \in [a,b] : F(x) > 1/n\}$. Entonces $0 = \int_a^b F \geq \int_{A_n} 1/n \geq \mu(A_n)/n$, luego $\mu(A_n) = 0$. Pero $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, así que $\mu(A) = 0$.

5. Todo subespacio vectorial de un espacio prehilbertiano es también un espacio prehilbertiano.

1.3. Distancia cuadrática. Espacios de Hilbert

A continuación, mostraremos cómo cada espacio prehilbertiano puede ser dotado, de manera natural, de una estructura de espacio métrico. La demostración es fácil a partir de las propiedades de la norma, y se deja como ejercicio.

Teorema-Definición 1.3.1. *Supongamos que H es un espacio prehilbertiano y que $\|\cdot\|$ es la correspondiente norma cuadrática. Entonces la función $d : (x,y) \in H \times H \mapsto d(x,y) = \|x-y\| \in [0,+\infty)$ es una distancia sobre H,*

es decir, verifica para todo $x, y, z \in H$ las siguientes propiedades:
(1) $d(x, y) = d(y, x)$
(2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
(3) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
Tal distancia se denomina la distancia cuadrática *sobre H.*

Se deduce que todo espacio prehilbertiano puede ser dotado de estructura de espacio topológico. A saber, los abiertos de la topología serían las uniones arbitrarias de bolas abiertas $B(x, r) := \{y \in H : d(x, y) < r\}$ ($x \in H$, $r > 0$). En particular, tiene sentido hablar de continuidad de aplicaciones $H \to T$, $T \to H$, donde T es cualquier espacio topológico.

En cuanto a la estructura métrica, recordemos algunos conceptos y propiedades relativos a un espacio métrico general (X, d):

- Una sucesión $(x_n) \subset X$ se denomina *convergente* cuando existe un elemento $x_0 \in X$ tal que $d(x_n, x) \to 0$ ($n \to \infty$). Tal x_0 es necesariamente único y se dice que es el *límite* de (x_n). Escribiremos $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ o bien $x_n \to x_0$.

- Una sucesión $(x_n) \subset X$ se dice que es *de Cauchy* cuando, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ para todo $m, n \geq n_0$.

- Toda sucesión convergente es de Cauchy, pero no a la inversa, en general. El espacio métrico (X, d) se dice *completo* cuando toda sucesión de Cauchy es convergente.

- Sean $A \subset X$ y $x_0 \in A$. Se tiene que $x_0 \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \to x_0$. Mediante $\overline{A}$ hemos denotado la clausura, cierre o adherencia de A. En particular, obtenemos que A es cerrado si y sólo si $[(x_n) \subset A,\ x_n \to x_0 \implies x_0 \in A]$.

- Supongamos que X es completo y $A \subset X$. Se verifica que A es cerrado si sólo si A, dotado de la distancia inducida, es un espacio métrico completo.

- Si A y B son subconjuntos no vacíos de X y $x \in X$, la *distancia entre x y A* y la *distancia entre A y B* se definen, respectivamente, como $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ y $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

- Si Y es otro espacio métrico, $x_0 \in X$ y $F : X \to Y$ es una aplicación, entonces F es continua en x_0 si y sólo si, para cada sucesión $(x_n) \subset X$ con $x_n \to x_0$, se verifica $F(x_n) \to F(x_0)$.

Usando, por ejemplo, la caracterización de la continuidad en espacios métricos dada en el punto anterior, así como la desigualdad triangular inversa y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se deduce fácilmente la siguiente proposición, cuya prueba se deja como ejercicio.

Proposición 1.3.2. *Si H es un espacio prehilbertiano, las aplicaciones $x \in H \mapsto \|x\| \in [0, +\infty)$ y $(x, y) \in H \times H \mapsto (x|y) \in \mathbb{R}$ son continuas.*

La completitud de la distancia cuadrática enriquece considerablemente las propiedades de un espacio prehilbertiano. Ello hace que tales espacios merezcan un nombre propio.

Definición 1.3.3. Un *espacio de Hilbert* es un espacio prehilbertiano que es completo para la distancia cuadrática.

Analicemos si los espacios prehilbertianos dados en la sección precedente son de Hilbert.

Ejemplos 1.3.4. 1. Basándose en la desigualdad $|x_i| \leq \|x\|$ $(i = 1, \ldots, N)$, donde $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, así como en la completitud de $\mathbb{R}$, obtenemos que el espacio $\mathbb{R}^N$ es completo, luego es de Hilbert.

2. Sin embargo, el espacio prehilbertiano $C([a,b])$ no es completo. Lo veremos en el caso $[a,b] = [0,1]$, siendo idéntica la prueba en el caso general, con los cambios obvios. Consideremos la sucesión de funciones continuas $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ constituida por líneas poligonales

$$f_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [0, 1/2 - 1/n] \\ \frac{n}{2}x - \frac{n}{4} + \frac{1}{2} & \text{si} \quad z \in [1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n] \\ 1 & \text{si} \quad t \in [1/2 + 1/n, 1]. \end{cases}$$

Fijemos $\varepsilon > 0$ y escojamos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 2/\varepsilon^2$. Supongamos que $m > n \geq n_0$. Ayudados de un dibujo de f_m y f_n, nos convencemos de que

$$\|f_m - f_n\|^2 = \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} |f_m(t) - f_n(t)|^2 \, dt \leq \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon^2,$$

de donde $d(f_m, f_n) < \varepsilon$. Luego (f_n) es una sucesión de Cauchy. Sin embargo, no existe $f \in C([0,1])$ tal que $f_n \to f$ en norma cuadrática. En efecto, razonando por reducción al absurdo, supongamos que tal f existe. Fijemos un punto $t_0 \in [0, 1/2)$. Si $f(t_0) \neq 0$, existiría por continuidad un $\delta \in (0, 1/2 - t_0)$ tal que $|f(t)| > |f(t_0)|/2 =: c > 0$ para todo $t \in [0, t_0 + \delta]$. Entonces si n es tal que $1/2 - 1/n > t_0 + \delta$ se tiene que

$$\int_0^1 |f_n - f|^2 \geq \int_{t_0}^{t_0+\delta} |f_n - f|^2 = \int_{t_0}^{t_0+\delta} |0 - f|^2 \geq c^2\delta.$$

Así, hemos llegado a que $\|f_n - f\| \geq \sqrt{\delta}c$ para todo n suficientemente grande, luego $f_n \not\to f$. Por tanto, debe ser $f(t_0) = 0$ para todo $t_0 \in [0, 1/2)$. Análogamente se prueba que $f(t_0) = 1$ para todo $t_0 \in (1/2, 1]$, lo que nos conduce a una contradicción con la continuidad de f en el punto $1/2$.

3. El espacio l_2 es de Hilbert. Para probarlo, fijemos una sucesión $(x_n)_{n \geq 1} \subset l_2$ de Cauchy en l_2, donde $x_n = (\xi_1^n, \ldots, \xi_i^n, \ldots)$ $(n \in \mathbb{N})$. Debido a que la norma

de cada vector de l_2 supera el valor absoluto de cada una de sus componentes, se sigue que, para cada $i \in \mathbb{N}$, la sucesión $(\xi_i^n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es completo, cada una de estas sucesiones converge a un número $x_i \in \mathbb{R}$. Denotemos $x_0 := (\xi_i)_{i\geq 1}$. Además, para cada $\varepsilon > 0$ podemos hallar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ se tiene $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Así, para cada N, se deduce

$$\sum_{i=1}^{N} |\xi_i^n - \xi_i^m|^2 < \varepsilon^2 \quad (n, m \geq n_0).$$

Haciendo que $n \to \infty$ se obtiene

$$\sum_{i=1}^{N} |\xi_i - \xi_i^m|^2 \leq \varepsilon^2 \quad (m \geq n_0) \tag{1}$$

Luego $x_0 - x_m \in l_2$ para todo $m \geq n_0$. Por tanto, tomando cualquiera de estos m, resulta $x_0 = (x_0 - x_m) + x_m \in l_2$, ya que l_2 es un espacio vectorial. Finalmente, haciendo $N \to \infty$ en (1), llegamos a

$$\|x_m - x_0\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^m|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon \quad (m \geq n_0),$$

lo que entraña $x_m \to x_0$. Esto prueba la completitud de l_2.

4. El espacio $L^2([a, b])$ es un espacio de Hilbert. Supongamos que (f_n) es una sucesión de Cauchy en $L^2([a, b])$. Gracias a un conocido teorema de Riesz y Fischer, existen una función $f \in L^2([a, b])$ y una subsucesión (f_{n_k}) de (f_n) tales que $f_n(t) \to f(t)$ e.c.t. $t \in [a, b]$. Recordemos ahora el Lema de Fatou: Si $h_k : [a, b] \to [0, +\infty)$ $(k \in \mathbb{N})$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces

$$\int_a^b \liminf_{k\to\infty} h_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_a^b h_k.$$

Por ser (f_n) de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\int_a^b |f_{n_k} - f_m|^2 < \varepsilon$ para todo $k, m \geq n_0$. Aplicando el Lema de Fatou a $h_k := |f_{n_k} - f_m|^2$, con

$m \geq n_0$ fijo, obtenemos

$$\|f_m - f\|^2 = \int_a^b |f - f_m|^2 \leq \varepsilon \quad (m \geq n_0),$$

de donde se se deduce que $f_n \to f$, y tenemos la completitud.

5. Todo subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert es también un espacio de Hilbert.

1.4. Convexidad. Proyecciones. Teorema de Riesz

La convexidad y, en especial, el Teorema del vector minimizante, ocupan un lugar prominente en el estudio de la aproximación en espacios de Hilbert. Recordemos el concepto, puramente algebraico, de conjunto convexo.

Definición 1.4.1. Un subconjunto C de un espacio vectorial es *convexo* si, para todo par de puntos $x, y \in C$ y todo escalar $\lambda \in [0, 1]$, se tiene que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.

Dicho de manera geométrica, C es convexo cuando contiene los segmentos que unen puntos de C.

Teorema 1.4.2. [*Teorema del vector minimizante*]. *Sea C un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert H. Entonces C contiene un único elemento de norma mínima.*

Demostración. Sea $\delta = \inf\{\|x\| : x \in C\}$. Hemos de demostrar que existe un único vector $x \in C$ tal que $\|x\| = \delta$. Vamos a probar, en primer lugar, la unicidad. Sean $x, y \in C$. Aplicando la identidad del paralelogramo a $x/2$ e

$y/2$, obtenemos

$$\frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2.$$

Como $\frac{x+y}{2} \in C$, tenemos

$$\|x-y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2. \tag{2}$$

Si ambos vectores x e y son de norma mínima, se tendría $\|x\| = \|y\| = \delta$, y deduciríamos de (2) que $\|x-y\| = 0$, así que $x = y$. Esto prueba la unicidad.

En cuanto a la existencia, tomemos una sucesión $(x_n) \subset C$ tal que $\|x_n\| \to \delta$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y seleccionemos un número $\eta \in (0, \min\{\varepsilon/4, \varepsilon^2/(16\delta)\})$. Podemos elegir un n_0 tal que $\|x_n\| < \delta + \eta$ para todo $n \geq n_0$. De nuevo aplicamos (2), pero esta vez a los vectores x_m, x_n con $m, n \geq n_0$. Resulta

$$\|x_m - x_n\|^2 \leq 2\|x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 - 4\delta^2 < 4(\delta+\eta)^2 - 4\delta^2 = 4\eta^2 + 8\delta\eta < \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{2} < \varepsilon^2.$$

Esto implica que (x_n) es de Cauchy. Por ser H completo, existe un $x_0 \in H$ tal que $x_n \to x_0$. Debido a que C es cerrado, $x_0 \in C$. Por último, gracias a la continuidad de la norma, $\|x_n\| \to \|x_0\|$, luego, por la unicidad del límite, $\|x_0\| = \delta$. □

Corolario 1.4.3. *Sea C un subconjunto convexo de un espacio de Hilbert H y $x \in C$. Entonces existe un único $c \in C$ tal que $\|x - c\| = d(x, C) = \inf\{\|x - u\| : u \in C\}$.*

Demostración. Basta aplicar el Teorema del vector minimizante al conjunto $K = x - C := \{x - c : c \in C\}$. □

El punto c obtenido en el corolario anterior se denomina la *proyección* de x sobre C. A continuación, introducimos la noción de ortogonalidad.

Definición 1.4.4. Sean x e y dos vectores de un espacio prehilbertiano H. Decimos que x e y son *ortogonales* si $(x|y) = 0$. El *conjunto ortogonal de x*

se define como $x^\perp = \{y \in H : (x|y) = 0\}$. Si M es un subconjunto de x, el *conjunto ortogonal de* M se define como

$$M^\perp = \{y \in H : (x|y) = 0 \ \forall x \in M\} = \bigcap_{x \in M} x^\perp.$$

Proposición 1.4.5. *Si H es un espacio prehilbertiano y $M \subset H$, $M^\perp$ es un subespacio cerrado de H.*

Demostración. Ya que $M^\perp = \bigcap_{x \in M} x^\perp$, es suficiente probar que $x^\perp$ es cerrado para cada $x \in H$. Basta observar ahora que $x^\perp = \varphi^{-1}(\{0\})$, donde $\varphi : H \to \mathbb{R}$ es la función continua dada por $\varphi(y) = (x|y)$. □

A continuación, veremos cómo se puede descomponer un espacio de Hilbert en suma de un subespacio prefijado y de su ortogonal. De hecho, la identidad va a resultar ser la suma de las proyecciones correspondientes.

Teorema-Definición 1.4.6. [*Teorema de la proyección*]. *Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Entonces existe un único par de aplicaciones $P : H \to M$, $Q : H \to M^\perp$ tales que $x = Px + Qx$ para todo $x \in H$. Estas aplicaciones tienen las siguientes propiedades:*
(a) *Si $x \in M$ entonces $Px = x$ y $Qx = 0$. Si $x \in M^\perp$ entonces $Px = 0$ y $Qx = x$.*
(b) $\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$ *para todo $x \in H$.*
(c) $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ *para todo $x \in H$.*
(d) *P y Q son lineales.*
Las aplicaciones P y Q son las llamadas proyecciones ortogonales *de H sobre M y $M^\perp$, respectivamente.*

Demostración. Notemos que cada subespacio es convexo. Según el Corolario 1.4.3, para cada $x \in H$ existe un único $c \in M$ que verifica $\|x - c\| = d(x, M)$. Definimos $Px := c$ y $Qx := x - Px$. Entonces se cumple (b), y además $P(H) \subset M$ y $x = Px + Qx$. Veamos que $Q(H) \subset M^\perp$. Fijemos $x \in H$ e

$y \in M$. Hemos de probar que $(Qx|y) = 0$. Podemos suponer que $\|y\| = 1$. Fijemos $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $Px + \alpha y \in M$, así que, por (b), tenemos

$$(Qx, Qx) = \|Qx\|^2 = \|x - Px\|^2 \leq \|x - (Px + \alpha y)\|^2$$

$$= \|Qx - \alpha y\|^2 = (Qx - \alpha y|Qx - \alpha y) = (Qx|Qx) + \alpha^2 - 2\alpha(Qx|y).$$

Si ahora hacemos $\alpha = (Qx|y)$, resulta $-(Qx|y)^2 \geq 0$, de donde $(Qx|y) = 0$. Por tanto $Q(H) \subset M^\perp$. Para probar la unicidad, nótese que si $x = x_0 + x_1$, con $x \in M$ y $x \in M^\perp$, se tiene $x_0 - Px = Qx - x_1 \in M \cap M^\perp = \{0\}$, luego $Px = x_0$, $Qx = x_1$, y el mismo razonamiento prueba (a).

La propiedad (c), que no es más que el Teorema de Pitágoras, es obvia, pues $(Px|Qx) = 0$. En cuanto a (d), fijemos dos vectores $x, y \in H$ y dos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tenemos

$$P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y,$$

$$\alpha(Px + Qx) = \alpha x, \;\; \beta(Py + Qy) = \beta y.$$

Restando las dos últimas igualdades de la primera, obtenemos

$$P(\alpha x + \beta y) - \alpha Px - \beta Py + Q(\alpha x + \beta y) - \alpha Qx - \beta Qy = 0,$$

de donde

$$M \ni P(\alpha x + \beta y) - \alpha Px - \beta Py = Q(\alpha x + \beta y) - \alpha Qx - \beta Qy \in M^\perp.$$

Esto fuerza a que ambos miembros sean cero, de donde se deduce (d). □

Corolario 1.4.7. *Si M es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H con $M \neq H$, entonces existe algún vector $x \in M^\perp \setminus \{0\}$.*

Demostración. Escoger $y \in H \setminus M$ y definir $x := Qy$. □

Hemos visto ya que, para cada vector $y \in H$, la aplicación $x \in H \mapsto (x|y)$ es lineal y continua. En el siguiente importante teorema de representación veremos que, de hecho, cualquier aplicación lineal y continua de un espacio de Hilbert en $\mathbb{R}$ (es decir, cada elemento del “dual”de H, cfr. Capítulo 3) tiene esta sencilla forma.

Teorema 1.4.8. [*Teorema de Riesz*]. *Supongamos que H es un espacio de Hilbert y que $T : H \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal y continua. Entonces existe un único vector $y \in H$ tal que $Tx = (x|y)$ para todo $x \in H$.*

Demostración. La unicidad es fácil: Si hubiese dos vectores $y, z \in H$ con $Tx = (x|y)$ y $Tx = (x|z)$ para todo $x \in H$, se tendría que $(x|y - z) = 0$ para cualquier x, de donde, tomando $x = y - z$, se deduce $(y - z|y - z) = 0$. Entonces $\|y - z\| = 0$, luego $y = z$.

Probemos ahora la existencia. Si $T \equiv 0$, basta tomar $y = 0$. Supongamos que $T \not\equiv 0$. Entonces $M := \operatorname{Ker} T = T^{-1}(\{0\})$ es un subespacio cerrado distinto de H. De acuerdo con el Corolario 1.4.3, existe algún vector $z \in M^{\perp} \setminus \{0\}$. Buscamos un vector y con $Tx \equiv (x|y)$, luego debe ser $Ty = \|y\|^2$. Tomamos entonces $y := \frac{Tz}{\|z\|^2} z$, que en efecto cumple $Ty = \|y\|^2$. Sea $x \in H$. Definimos $x' := x - \frac{Tx}{\|y\|^2} y$, $x'' := \frac{Tx}{\|y\|^2} y$. Entonces $Tx' = Tx - \frac{Tx}{\|y\|^2}\|y\|^2 = 0$. Luego $x' \in M$ y, por consiguiente, $(x'|y) = 0$. De aquí obtenemos $(x|y) = (x''|y) = (\frac{Tx}{\|y\|^2} y|y) = Tx$. □

Anotamos aquí, para posteriores referencias, que se suele llamar “forma” o “funcional” a una aplicación $\varphi : H \to \mathbb{R}$, es decir, con valores en el cuerpo base.

1.5. Ortonormalidad. Problema de aproximación

Con la introducción del concepto de ortonormalidad, es posible resolver el problema de la mejor aproximación –es decir, de la menor distancia cuadrática– de un punto a un subespacio de dimensión finita. Consideraremos sinónimas las palabras "conjunto" y "sistema".

Definición 1.5.1. Consideremos un conjunto de vectores $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ en un espacio prehilbertiano H. Diremos que tal conjunto es *ortogonal* cuando $(u_\alpha|u_\beta) = 0$ para todo par $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \neq \beta$. Es *ortonormal* si, además, $\|u_\alpha\| = 1$ para todo $\alpha \in A$. Si $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un conjunto ortonormal y $x \in H$, a los números $(x|u_\alpha)$ se les llama *coeficientes de Fourier* de x respecto del sistema $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Ejemplo 1.5.2. Consideremos el espacio prehilbertiano $C([0, 2\pi])$, así como las funciones $u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $u_n(t) = \frac{\operatorname{sen} nt}{\sqrt{\pi}}$, $u_{-n}(t) = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Es fácil ver que la familia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, llamada "sistema trigonométrico", es un sistema ortonormal. Sea $f \in C([0, 2\pi])$. Los coeficientes de Fourier de f respecto de tal sistema son los números $c_n = \int_0^{2\pi} f(t)u_n(t)\,dt$ $(n \in \mathbb{Z})$. Es inmediato ver que $c_n = \sqrt{\pi}b_n$, $c_{-n} = \sqrt{\pi}a_n$ y $c_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0$, donde a_n $(n \geq 0)$ y b_n $(n \geq 1)$ son los coeficientes de Fourier "clásicos"de f, dados por $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt$ $(n \geq 0)$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt$ $(n \geq 1)$, y relacionados con f en la forma

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt).$$

Por supuesto, el sistema trigonométrico es también ortonormal en el espacio de Hilbert $L^2([0, 2\pi])$.

Las normas de los vectores del subespacio generado por un sistema ortonormal son especialmente sencillas de manejar. Lo establecemos en la siguiente proposición, cuya prueba es inmediata y se deja como ejercicio.

Proposición 1.5.3. *Sea $\{u_1, \ldots, u_n\}$ un sistema ortonormal finito en un espacio prehilbertiano H. Sea $x \in H$ y supongamos que, para ciertos escalares c_k $(k = 1, \ldots, n)$, se tiene $x = \sum_{k=1}^n c_k u_k$. Se verifica:*

(a) $c_k = (x|u_k)$ $(k = 1, \dots, n)$.

(b) $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2$ [*Teorema de Pitágoras*].

Corolario 1.5.4. *Todo conjunto ortonormal es linealmente independiente.*

Demostración. En efecto, supongamos que $\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0$, donde los vectores u_k pertenecen a un sistema ortonormal. Por el Teorema de Pitágoras, $0 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$, luego cada λ_k es 0. $\square$

Como propusimos al principio de esta sección, vamos a estudiar un problema de aproximación. Si A es un subconjunto cualquiera de un espacio vectorial, denotaremos por span$A$ (o bien por $\langle A \rangle$) el subespacio vectorial generado por A, es decir, el conjunto de las combinaciones lineales finitas de los vectores de A. Supongamos que L es un subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio prehilbertiano H. Estamos interesados en hallar el vector de L que da la mejor aproximación de un vector $x \in H$ prefijado al subespacio M. Por el procedimiento clásico de Gram-Schmidt, dada una base algebraica A de L, podemos hallar un sistema ortonormal B tal que $\operatorname{span} A = \operatorname{span} B = M$. Por tanto, nuestro problema de aproximación es equivalente al siguiente: Dados $x \in H$ y un sistema ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\}$, encontrar $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que $\|x - \sum_{i=1}^n c_i u_i\|$ sea mínimo, o sea, hallar el vector de $\operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ que más se aproxima a x. Vamos a ver que la mejor aproximación se consigue eligiendo como c_k los coeficientes de Fourier de x.

Teorema 1.5.5. *Supongamos que H es un espacio prehilbertiano, que $x \in H$ y que $\{u_1, \dots, u_n\}$ es un sistema ortonormal en H. Entonces, para cualquier elección de escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, se tiene*

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n (x|u_k) u_k \right\| \le \left\| x - \sum_{i=1}^n \lambda_k u_k \right\|.$$

Además, la igualdad se da sólo si $\lambda_k = (x|u_k)$ $(k = 1, \dots, n)$.

Demostración. Denotemos $c_k := (x|u_k)$ para cada k. Usando que $(u_k|u_l) = 0$ si $k \neq l$, así como $(u_k|u_k) = 1$, obtenemos

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \right\|^2 = (x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k | x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k) =$$

$$\|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^2 - 2\lambda_k c_k) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - c_k)^2,$$

de donde se deduce el resultado. □

Nota 1.5.6. Con las notaciones y condiciones del teorema anterior, sea $M = \operatorname{span}\{u_k\}_{k=1}^n$. De acuerdo con el Teorema de la Proyección, el vector $\sum_{k=1}^n (x|u_k)u_k$ es la proyección ortogonal de x en M. Por tanto, $\|x - \sum_{k=1}^n (x|u_k)u_k\|^2 = d(x, M)^2$. Puesto que $\|x - \sum_{k=1}^n (x|u_k)u_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n (x|u_k)^2$, se obtiene $\sum_{k=1}^n (x|u_k)^2 = \|x\|^2 - d(x, M)^2$.

Como mostraremos seguidamente, el Teorema de Pitágoras no es válido en dimensión infinita. La versión infinito-dimensional del mismo es una igualdad condicionada, conocida como Igualdad de Parseval. Antes de seguir, recordemos que en un espacio prehilbertiano H hay definida una métrica de manera natural, y por tanto una convergencia. Si (x_n) es una sucesión de vectores de H, que la serie $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge significa que existe un vector $u \in H$, necesariamente único, tal que $S_n \to u$ respecto de la distancia cuadrática, donde $S_n = x_1 + \cdots + x_n$, la sucesión de sumas parciales de (x_n). En tal caso, denotaremos $\sum_{n=1}^\infty x_n = u$. Si $x \in H$, llamaremos *serie de Fourier* asociada a x respecto de un sistema ortonormal dado $\{u_n\}_{n\geq 1}$ a la serie $\sum_{n=1}^\infty (x|u_k)u_k$.

Teorema 1.5.7. *Sean H un espacio prehilbertiano, $x \in H$ y $\{u_n\}_{n\geq 1}$ un sistema ortonormal en H. Se verifica:*

(a) [*Desigualdad de Bessel*] $\sum_{k=1}^\infty (x|u_k)^2 \leq \|x\|^2$.

(b) [*Igualdad de Parseval*] *La serie de Fourier asociada a x converge a x si*

y sólo si $\sum_{k=1}^{n}(x|u_k)^2 = \|x\|^2$.
(c) *Si* H *es de Hilbert, entonces la serie de Fourier asociada a* x *es convergente.*

Demostración. Los apartados (a) y (b) resultan de la igualdad

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n}(x|u_k)u_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}(x|u_k)^2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Finalmente, (c) se obtiene de que la correspondiente sucesión (S_n) de sumas parciales de la serie de Fourier es de Cauchy –luego convergente, por ser H completo– ya que $\|S_m - S_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m}(x|u_k)^2$ si $m \geq n$. Notar que, por (a), la última expresión es $< \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ prefijado, si $m \geq n$ y n es suficientemente grande. □

Notemos que en (c) no se ha dicho que, necesariamente, la serie de Fourier converja a x. El teorema anterior motiva la siguiente definición.

Definición 1.5.8. En un espacio prehilbertiano, un sistema ortonormal $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es *completo* si la igualdad de Parseval vale para todo $x \in H$.

En el siguiente resultado, proporcionamos una caracterización de la completitud de un sistema ortonormal. Un subconjunto A de un espacio prehilbertiano se dice que es *total* cuando $\overline{\text{span}A} = H$.

Teorema 1.5.9. *Supongamos que* $\{u_n\}_{n\geq 1}$ *es un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano* H*. Son equivalentes las siguientes propiedades:*
(a) *El sistema* $\{u_n\}_{n\geq 1}$ *es completo.*
(b) *Cada vector de* H *es la suma de su serie de Fourier relativa a* $\{u_n\}_{n\geq 1}$.
(c) *El sistema* $\{u_n\}_{n\geq 1}$ *es total.*

Si H *es de Hilbert, entonces las propiedades anteriores son equivalentes a cada una de las siguientes:*
(d) $\{u_n\}_{n\geq 1}^{\perp} = \{0\}$.

(e) *El sistema* $\{u_n\}_{n\geq 1}$ *es maximal, es decir, no está contenido estrictamente en ningún otro sistema ortonormal.*

Demostración. La equivalencia entre (a) y (b) viene dada por el segundo apartado del teorema anterior. Supongamos que (b) se cumple, y sea $x \in H$. Entonces $x = \lim_{n\to\infty} S_n$, donde (S_n) es la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier asociada a x. Pero cada S_n está en $\operatorname{span}(u_n)$, de donde deducimos (c). Supongamos ahora que (c) se satisface y que, por reducción al absurdo, la propiedad (b) no se da, es decir, existe un vector $x \in H$ cuya serie de Fourier no converge a él. En tal caso, podemos hallar un $\alpha > 0$ y una sucesión estrictamente creciente (n_k) de números naturales tales que $\|S_{n_k} - x\| > \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $y \in \operatorname{span}(u_n)$. Entonces existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tales que $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$. Definamos $\lambda_i = 0$ si $i > p$ y elijamos un $k \in \mathbb{N}$ con $n_k > p$. Se deduce, gracias al Teorema 1.5.5, que

$$\|x - y\| = \left\| x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \right\| = \left\| x - \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i u_i \right\| \geq \|x - S_{n_k}\| > \alpha.$$

En resumen, $\|x - y\| > \alpha$ para todo $y \in \operatorname{span}(u_n)$, lo que contradice (c). Así pues, (a), (b) y (c) son equivalentes.

Supongamos ahora que cualquiera de las tres propiedades anteriores es cierta, y que, por reducción al absurdo, el sistema $\{u_n\}_{n\geq 1}$ no es maximal. Esto significa que existe algún vector $x \in X$ con $\|x\| = 1$ que es ortogonal a todos los u_n, es decir, $(x|u_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero ello conlleva $\|x\|^2 = 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)^2 = 0$, lo que contradice (a). Esto prueba (e). Si (e) es cierta pero (d) no lo es, existiría un vector x no nulo con $x \in \{u_n\}_{n\geq 1}^{\perp}$, así que el sistema $\{u_n\}_{n\geq 1} \cup \{x/\|x\|\}$ es ortonormal y contiene estrictamente a $\{u_n\}_{n\geq 1}$, lo cual es de nuevo una contradicción. Por tanto, (e) implica (d).

Finalmente, partimos de que H es un espacio de Hilbert y de que la propiedad (d) es válida. Nuestro objetivo es probar que (b) se verifica. Para ello, fijemos un vector $x \in H$ y recordemos que, por ser H de Hilbert, la serie de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty}(x|u_n)u_n$ es convergente. Llamemos, respectivamente, y al vector suma y (S_n) a la sucesión de sumas parciales de tal serie. Fijemos un $p \in \mathbb{N}$. Gracias a la continuidad del producto escalar, resulta que

$$(x - y|u_p) = (x - \lim_{n\to\infty} S_n|u_p) = \lim_{n\to\infty}(x - S_n|u_p)$$

$$= (x|u_p) - \lim_{n\to\infty}(S_n|u_p) = (x|u_p) - (x|u_p) = 0,$$

donde se ha usado que $(S_n|u_p) = (x|u_p)$ para cada $n \geq p$. Por tanto $x - y \in \{u_n\}_{n\geq 1}^{\perp} = \{0\}$, luego $x - y = 0$. Se deduce que $x = y = \sum_{n=1}^{\infty}(x|u_n)u_n$, lo cual es (b). □

Un sistema ortonormal numerable $\{u_n\}_{n\geq 1}$ en un espacio de Hilbert H se dice que es una *base ortonormal* de H cuando cumple cualquiera de las propiedades equivalentes (a)–(e) del teorema anterior. Recordemos que un espacio topológico se dice *separable* cuando contiene algún subconjunto denso y numerable. Recordemos también que dos espacios métricos (X, d_1), (Y, d_2) son *isométricos* si existe una isometría entre ellos, es decir, una aplicación $\Phi : X \to Y$ biyectiva tal que $d_1(x, y) = d_2(\Phi(x), \Phi(y))$. Puede demostrarse que un espacio de Hilbert es separable si y sólo si contiene una base ortonormal. Además, todo espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isométrico a l_2. En efecto, una isometría entre ambos espacios viene dada por $\Phi : (x_n) \in l_2 \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H$, donde $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es una base ortonormal (se verá en uno de los ejercicios).

Ejemplo 1.5.10. El sistema trigonométrico visto en el Ejemplo 1.5.2 es completo. Por tanto, para cada $f \in L^2([0, 2\pi])$, se verifica la igualdad de Parseval para series trigonométricas de Fourier:

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \right).$$

Para probar que el sistema trigonométrico es completo, vamos a utilizar la caracterización (c) del teorema anterior junto con el Teorema de Fejér.

Este teorema afirma lo siguiente: Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ una función continua con $f(0) = f(2\pi)$. Entonces la serie de Fourier de f converge Cèsaro uniformemente a f, o sea, si $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$ y $\sigma_n(x) = \frac{s_1(x)+\cdots+s_n(x)}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$, entonces $\sigma_n \to f$ $(n \to \infty)$ uniformemente en $[0, 2\pi]$. También haremos uso del conocido hecho de la densidad de $C([0, 2\pi])$ en $L^2([0, 2\pi])$.

Demostremos la completitud. Notemos que cada función σ_n está en el conjunto $\operatorname{span}(u_n)$, donde (u_n) es el sistema trigonométrico. Fijemos una función $f \in L^2([0, 2\pi])$ y un $\varepsilon > 0$. Hemos de probar la existencia de una función $\sigma \in \operatorname{span}(u_n)$ tal que $\|f - \sigma\| < \varepsilon$. Por densidad, existe $g \in C([0, 2\pi])$ tal que $\|f - g\| < \varepsilon/3$. Llamemos $M := \sup_{[0,2\pi]} |g|$, y tomemos $\delta \in (0, \frac{\varepsilon^2}{36(1+M)^2})$. Definimos una función continua $h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ como $h(t) = g(t)$ si $t \in [0, 2\pi - \delta]$, $h(2\pi) = g(0)$, haciéndola lineal afín en $[2\pi - \delta, 2\pi]$. Entonces

$$\int_0^{2\pi} (g(t) - h(t))^2\, dt = \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} (g(t) - h(t))^2\, dt \leq \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} (2M)^2\, dt \leq 4M^2\delta < \frac{\varepsilon^2}{9}.$$

Así, $\|g - h\|_2 < \varepsilon/3$. Finalmente, gracias al Teorema de Fejér, existe $\sigma \in \operatorname{span}(u_n)$ tal que $|\sigma(t) - h(t)| < \varepsilon/8$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Por tanto,

$$\int_0^{2\pi} (\sigma(t) - h(t))^2\, dt \leq 2\pi\frac{\varepsilon^2}{64} < \frac{\varepsilon^2}{9},$$

o lo que es lo mismo, $\|\sigma - h\|_2 < \varepsilon/3$. En consecuencia, por la desigualdad triangular,

$$\|f - \sigma\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2 + \|h - \sigma\| < \varepsilon,$$

como queríamos demostrar.

1.6. Espacios de Hilbert complejos

Hasta ahora hemos estudiado espacios de Hilbert definidos para espacios vectoriales reales. Si tenemos un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, hay que modificar un poco la definición de producto escalar. Observemos que, si mantenemos la primera definición, los axiomas serían incompatibles, pues $(ix|ix) > 0$ y $(x|x) > 0$ si $x \neq 0$, pero $0 < (ix|ix) = i^2(x|x) = -(x|x) < 0$.

Definición 1.6.1. Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Llamamos *producto escalar* sobre H a una aplicación $(\cdot|\cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$ que cumple, para todos los vectores $x, y \in H$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{C}$, las siguientes propiedades:
(1) $(x|y) = \overline{(y|x)}$
(2) $(x|y + z) = (x|y) + (x|z)$
(3) $(\alpha x|y) = \alpha(x|y)$
(4) $(x|x) \geq 0$
(5) $(x|x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.
Un espacio vectorial complejo H dotado de un producto escalar se denomina *espacio prehilbertiano complejo*. Un espacio prehilbertiano sobre $\mathbb{C}$ que es completo para la distancia cuadrática se dice que es un *espacio de Hilbert complejo*.

Nótese ahora que, si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $x, y \in H$, entonces $(x|\alpha y) = \overline{(\alpha y|x)} = \overline{\alpha(y|x)} = \overline{\alpha}(x|y)$. Por tanto, el producto escalar no es ya bilineal, sino sesquilineal. No obstante, los teoremas vistos en las primeras secciones para el caso real (desigualdad de Cauchy-Schwarz, desigualdad triangular, ley del paralelogramo, teorema de la proyección, teorema de representación de Riesz, desigualdad de Bessel, igualdad de Parseval, etc) son también válidos para el caso complejo. En la desigualdad de Bessel e igualdad de Parseval, las expresiones $(x|u_k)^2$ deben sustituirse por $|(x|u_k)|^2$.